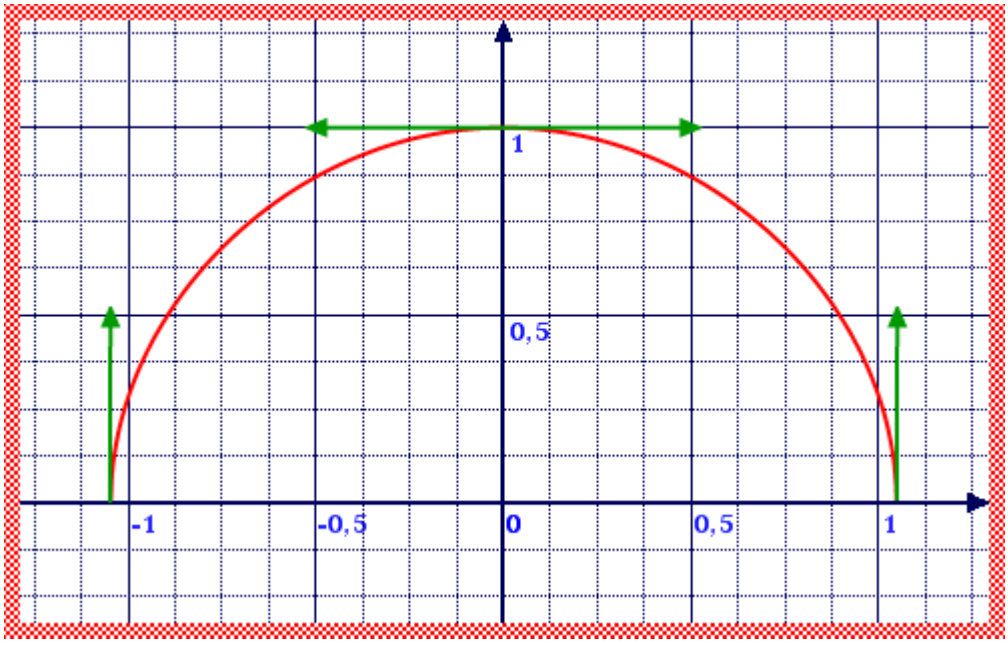

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[$, la dérivée est positive ($\sin x$ est négatif) donc f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, f est décroissante.

Exercice n°3

Partie A

$\varphi(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ la courbe représentative de φ est tangente à T en I si $\varphi(0) = 3$ et $\varphi'(0) = 4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0) = b = 3$ et $\varphi'(x) = \dfrac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + 3)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = a = 4$.

Partie B

1. $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2 + 1} = \dfrac{\alpha(x^2 + 1) + \beta x}{x^2 + 1} = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}{x^2 + 1} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 4$.

2. $f'(x) = \dfrac{4(x^2 + 1) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$ d'où les racines –1 et 1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{4x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{4x}{x^2} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 3$, asymptote horizontale $y = 3$.

3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$.

Le signe de $f(x) - (4x + 3) = 3 + \dfrac{4x}{x^2 + 1} - 4x - 3 = \dfrac{4x - 4x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \dfrac{-4x^3}{x^2 + 1}$ qui admet le signe de $-x$, donc (C) est au dessus de (T) pour $x \leq 0$ et en-dessous pour $x \geq 0$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn